אלגברה לינארית לפיזיקאים - תרגיל בית 8

1. למדנו בשבועות האחרונים על תהליך גרם־שמידט והטלות אורתוגונליות. המטרה של התרגיל הזה היא לעשות סדר – להבין איך מבצעים את תהליך גרם־שמידט, איך מוצאים את טרנספורמציית ההטלה, ואיך הם קשורים אחד לשני.

נתון הבסיס הסדור: $B_1 = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. אם נבצע את תהליך גרם־שמידט, נקבל את הבסיס האורתונורמלי: $B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$.

א. בחרו את הווקטור הראשון b_1 ונרמלו אותו, כדי לקבל את הווקטור הראשון בבסיס האורתונורמלי $b'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ב. (**רשות**) הוכיחו את הטענה הבאה: יהי U תת מרחב לינארי כלשהו של V. יהי $C = \{c_1, ..., c_k\}$ בסיס <u>אורתונורמלי</u> למרחב U. אזי, מתקיים כי אופרטור ההטלה $P_U(v)$ נתון על ידי:

$$P_U(v) = \langle c_1|v\rangle\, c_1 + ... + \langle c_k|v\rangle\, c_k$$

כלומר $P_U(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle c_j|v\rangle\, c_j$. (רמז: תנסו להבין מה אתם מנסים להוכיח – אופרטור ההטלה <u>מוגדר</u> על ידי כך ש $P_U(v) = u$ כאשר u הוא אותו אחד מהפירוק היחיד של v כ: $v = u + w, u \in U, w \in U^{\perp}$).

ג. נגדיר את המרחב $U_1 = \mathrm{Sp}\{b'_1\}$ (שימו לב שb'_1 מהווה בסיס אורתונורמלי לU_1 כי הוא מנורמל). הסיקו מסעיף ב' כי $P_{U_1}(v) = \langle b'_1|v\rangle\, b'_1$. מצאו את $P_{U_1}(v)$ במפורש – כלומר, עבור כל וקטור כללי במרחב $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ חשבו מה הערך של $P_{U_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

ד. בצעו את החלק השני בתהליך גרם שמידט: מצאו וקטור d_2 המאונך לb'_1 על ידי כך שתחסירו מהווקטור השני את ההטלה שלו על b'_1, כלומר: $d_2 = b_2 - P_{U_1}(b_2)$. וודאו שd_2 אכן מאונך לb_1. לבסוף, נרמלו את d_2 כדי להוכיח כי הוקטור השני בבסיס האורתונורמלי הוא: $b'_2 = \frac{d_2}{||d_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ה. נגדיר את המרחב $U_2 = \mathrm{Sp}\{b'_1, b'_2\}$. הסיקו מסעיף ב' כי $P_{U_2}(v) = \langle b'_1|v\rangle\, b'_1 + \langle b'_2|v\rangle\, b'_2$. כתבו מפורשות את אופרטור ההטלה $P_{U_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

ו. בצעו את החלק השלישי של תהליך גרם־שמידט: מצאו ווקטור מאונך למרחב U_2 ע"י $d_3 = b_3 - P_{U_2}(b_3)$, ונרמלו אותו כדי להוכיח כי הווקטור השלישי (והאחרון) הוא: $b'_3 = \frac{d_3}{||d_3||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ז. נגדיר את המרחב $U_3 = \mathrm{Sp}\{b'_1, b'_2, b'_3\}$. למה שווה U_3? נגדיר את טרנספורמציית ההטלה $P_{U_3} = \langle b'_1|v\rangle\, b'_1 + \langle b'_2|v\rangle\, b'_2 + \langle b'_3|v\rangle\, b'_3$. הראו על ידי חישוב ישיר כי $P_{U_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. כלומר, P_{U_3} הוא אופרטור היחידה. האם זה מה שהייתם מצפים לו? (מה קורה כשמטילים ווקטור על כל המרחב?).

הערה: מה שעשינו בעצם היה "לכתוב את טרנספורמציית היחידה בדרך מסובכת". זה יכול להשמע כמו שעשוע אלגברי בלבד, אבל מסתבר (תתקלו זאת בהמשך בקורסים בקוונטים) שזאת דרך שמאוד חביבה על פיזיקאים כדי לבצע מעברי בסיס בין בסיסים אורתונורמליים. אולי נדבר על זה עוד בהמשך.

2. נסתכל על המרחב $\mathbb{C}_2[x]$ (הפולינומים עד מעלה שניה כולל, עם מקדמים שיכולים להיות מרוכבים) המוגדרים בקטע הממשי $[-1,1]$. נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f^*(x)g(x)$$

כאשר $f(x), g(x)$ הן שתי פונקציות (פולינומים) במרחב. בסוג זה של מכפלה פנימית תתקלו המון בהמשך התואר (אבל לאו דווקא על מרחב הפולינומים או בגבולות הללו).

א. הוכיחו כי זאת אכן מכפלה הפנימית. כלומר, הוכיחו כי מתקיימות התכונות הבאות: א. $\langle \alpha f|g\rangle = \alpha^* \langle f|g\rangle$ כאשר α הוא סקלר. ב. $\langle f+h|g\rangle = \langle f|g\rangle + \langle h|g\rangle$. ג. $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^*$. ד. אם $\langle f|f\rangle = 0$ אז $f=0$ (כלומר, f היא פונקציית האפס). <u>הערה</u>: מספיק לבדוק את ארבעת התכונות האלה, ואת שאר התכונות מתקבלות מהם (נסו לקבל אותן). לדוגמא: $\langle f|\alpha g\rangle = \langle \alpha g|f\rangle^* = (\alpha^* \langle g|f\rangle)^* = \alpha \langle f|g\rangle$.

ב. הפעילו את תהליך גרם־שמידט על הבסיס הבא: $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \left\{x^2, x, 1\right\}$ בכדי לקבל בסיס חדש שהוא אורתונורמלי עבור המכפלה הפנימית שהגדרנו למעלה. הערה: זה דומה למה שעשיתם בשיעור, אבל בסדר ההפוך (מתחילים עם הווקטור x^2 במקום עם 1). בנוסף, שימו לב שמכיוון שהמקדמים של הפולינומים ממשיים, אין חשיבות לצמוד ההרימטי החל מעכשיו.

3. נתסכל על הווקטורים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ב$\mathbb{R}^4$. נגדיר: $U = \mathrm{Sp}\{v_1, v_2\}$.

א. מה המימד של U? לפי משפט המימדים (השני) שלמדתם בשיעור, מה המימד של המרחב המאונך $U^\perp$?

ב. (**רשות**) הוכיחו את הטענה הבאה: אם ווקטור מאונך לכל אחד מאיברי הבסיס U, אז הוא מאונך לכל הווקטורים שבU. לכן, בדיקה כי וקטור מאונך לכל אחד מאיברי הבסיס של U מהווה תנאי שקול לכך שהווקטור שייך למרחב $U^\perp$.

ג. השתמשו בסעיף הקודם כדי למצוא את המרחב המאונך $U^\perp$ (מצאו בסיס שלו).

ד. מצאו במפורש את אופרטור ההטלה האורתוגונלית P_U. כלומר, מצאו את $P_U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =?$. רמז: אם אתם רוצים להשתמש בסעיף ב' של שאלה 1, זכרו להשתמש בבסיס אורתונורמלי (זאת אינה הדרך היחידה למצוא את P_U).

ה. הראו כי $\mathrm{Ker}(P_U) = U^\perp$, $\mathrm{Im}(P_U) = U$. (למעשה זה נכון באופן כללי לאופרטורי הטלה).

ו. באופן כללי, מסתבר שP הוא אופרטור הטלה על מרחב כלשהו אם ורק אם $P^2 = P$. כלומר – שלכל v, $P(P(v)) = P(v)$. מדוע זה מה שאנו מצפים מאופרטור הטלה? (מה קורה כשמטילים ווקטור למרחב שהוא כבר נמצא בו?). הראו מפורשות כי $P_U^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P_U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, כאשר P_U הוא אופרטור ההטלה שמצאתם בסעיף ד'.

4. נתון הבסיס האורתונורמלי: $B=\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$ למרחב $\mathbb{C}^3$.

א. יהי $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. מצאו את $[v]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$ (הקאורדינטות בבסיס B).

ב. נגדיר את P להיות מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס הסטנדרטי E (בסימונים של פעם, $P=M_E^B$). כתבו במפורש את P. עבור אותו v מסעיף א', בדקו שאכן זאת המטריצה שמעבירה אותנו מהבסיס B לבסיס הסטנדרטי. כלומר, בדקו מפורשות כי מתקיים:

$$[v]_E=P[v]_B$$

תזכורת: בשביל למצוא את מטריצת מעבר מבסיס כלשהו לבסיס הסטנדרטי לא נדרש בפועל שום חישוב – העמודות שלו הן פשוט הווקטורים של B. בנוסף, הקאורדינטות של וקטור בבסיס הסטנדרטי זה הוא בעצמו.

ג. בתרגיל הבית הקודם הגדרנו את פעולת הצמוד ההרמיטי: $A^\dagger=(A^*)^T$. אמרנו שמטריצה היא אוניטרית אם מתקיים $P^\dagger P=I$, כאשר I היא מטריצת היחידה. וודאו מפורשות כי המטריצה P מהסעיף הקודם היא אוניטרית. האם זה היה כך אילו הבסיס B לא היה אורתונורמלי?

ד. הסבירו מדוע העובדה שP היא מטריצה אוניטרית שקול לכך כי $P^{-1}=P^\dagger$ (שימו לב שהרבה יותר קל למצוא ככה את ההופכית! אם יש לכם מרץ תנסו בשיטה ה"ישנה" ותבדקו שיוצא אותו דבר).

ה. תהי T טרנספורמציה לינארית, המוגדרת על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+z\\y+z\end{pmatrix}$. מצאו את $[T]_E$ (המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי).

ו. מצאו את $[T]_B$, המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B שהוגדר לעיל. תזכורת: המשפט הכללי שלמדנו הוא: $[T]_B=P^{-1}[T]_EP$, כאשר P היא מטריצת המעבר מהבסיס B לE.

ז. (**רשות**) הוכיחו את הטענה הבאה – במקרה שבסיס B כלשהו הוא אורתונורמלי, אז המטריצה $[T]_B$ נתונה על ידי הביטוי:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\langle b_1|T(b_1)\rangle & \langle b_1|T(b_2)\rangle & \langle b_1|T(b_3)\rangle\\ \langle b_2|T(b_1)\rangle & \langle b_2|T(b_2)\rangle & \langle b_2|T(b_3)\rangle\\ \langle b_3|T(b_1)\rangle & \langle b_3|T(b_2)\rangle & \langle b_3|T(b_3)\rangle\end{pmatrix}$$

כלומר, האיבר הi,j של המטריצה $[T]_B$ נתון על ידי $\langle b_i|T(b_j)\rangle$.

ח. חשבו בעזרת סעיף ז. את המטריצה $[T]_B$ עבור אותו B שעבדנו איתו בתחילת השאלה, ובדקו שקיבלתם את אותה התוצאה כמו בסעיף ו.

<u>הערה לסיום</u>: גם אם לא הוכחתם את הנוסחא בסעיף ז. – כדאי לכם לזכור אותה! מכיוון שבקוונטים עובדים לרוב עם בסיסים אורתונורמליים, הנוסחא הזאת היא אחת הדרכים **הכי נפוצות** כדי לחשב את המטריצה המייצגת של אופרטור כלשהו.

5. יהי $z = a + ib \in \mathbb{C}$ מספר מרוכב. החלק הממשי מסומן כ:$a = \mathrm{Re}(z)$, והחלק המדומה: $b = \mathrm{Im}(z)$.

א. הוכיחו כי $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2}$, $i \cdot \mathrm{Im}(z) = \frac{z-z^*}{2}$. שימו לב שהראשון הוא מספר ממשי (כלומר, החלק המדומה שלו הוא אפס), והשני הוא מספר מדומה טהור (כלומר, החלק הממשי שלו הוא אפס)

ב. הוכיחו כי $z = z^*$ אם ורק אם z הוא ממשי. הוכיחו כי $z = -z^*$, אם ורק אם z מדומה טהור.

ג. נגדיר מטריצה הרמיטית כמטריצה שהצמוד ההרמיטי שלה שווה לעצמה: $A = A^\dagger$. הוכיחו כי האיברים שעל האלכסון של A הם ממשיים. באופן דומה, הוכיחו כי אם מטריצה היא אנטי־הרמיטית (כלומר $A = -A^\dagger$), אז האיברים על האלכסון הם מדומים טהורים.

הערה: מה המסקנה מהתרגיל הזה? באופן שכרגע נראה דיי משונה, מטריצות הרמיטיות ואנטי הרמיטיות קצת מזכירות לנו מספרים ממשיים ומדומים. שימו לב שבסעיף א' ראינו בעצם שכל מספר מרוכב אפשר לכתוב בתור:

$$z = \frac{z + z^*}{2} + \frac{z - z^*}{2}$$

כאשר החלק הראשון הוא ממשי והשני הוא מדומה טהור. מי שחד אולי ישים לב שזה מזכיר מאוד את הטענה שראינו בתרגיל בית הקודם שאומר ש:

$$A = \frac{A + A^\dagger}{2} + \frac{A - A^\dagger}{2}$$

כאשר החלק הראשון הוא מטריצה הרמיטית, והחלק השני הוא מטריצה אנטי־הרמיטית. כרגע נראה שהדמיון הזה מסתכם בטענה הזאת ובעובדה שהאיברים על האלכסון הם ממשיים או מדומים – אבל יש פה משהו עמוק יותר. נחזור לדבר על כך בהרחבה לקראת סוף הקורס.

6. (**רשות**) הוכיחו כי:

א. $U \cap U^\perp = \{0\}$.

ב. $\left(U^\perp\right)^\perp = U$. רמז: הוכיחו כי $U \subseteq \left(U^\perp\right)^\perp$, וגם כי $\dim U = \dim \left(U^\perp\right)^\perp$, ומכאן הסיקו את השוויון.

ג. הוכיחו את אי־שוויון **קושי־שוורץ**: $|\langle u|v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$. כלומר, שהערך המוחלט של המכפלה הפנימית של u ושל v קטן שווה מהגודל של u כפול הגודל של v. לשם הפשטות, תוכלו להניח שמדובר במרחב $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. למחפשי אתגר: אל תניחו שמדובר ב$\mathbb{R}^2$ ובמכפלה הפנימית הסטנדרטית, הוכיחו זאת באופן כללי.